Ffwythiannau o newidyn cymhlyg

Deilliad: Os yw $w = f(z)$ ar gyfer y rhifau cymhlyg z ac w, yna'r deilliad $\frac{dw}{dz}$ yn z_0 yw

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right],$$

cyn belled fod y derfan yn bodoli wrth i $z \to z_0$ ar hyd *unrhyw* lwybr. Os oes gan $f(z)$ ddeilliad yn y pwynt z_0 ac ymhob pwynt mewn rhyw gymdogaeth o z_0, yna dywedir fod $f(z)$ yn **ddadansoddol** yn z_0. Os yw $f(z)$ yn ddadansoddol ymhob pwynt mewn rhanbarth (agored) R, yna dywedir fod $f(z)$ yn **ddadansoddol** yn R.

Hafaliadiau Cauchy-Riemann: Os yw $z = x + jy$ a $w = f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ ar gyfer x, y, u a v sy'n newidynnau real, a bod $f(z)$ yn ddadansoddol mewn rhyw ranbarth R o'r plân z, yna bodlonir yr **hafaliadau Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

trwy R. Os yw'r deilliadau rhannol uchod yn ddi-dor o fewn R, yna mae'r hafaliadau Cauchy-Riemann yn amodau digonol er mwyn sicrhau fod $f(z)$ yn ddadansoddol. Ymhellach, mae $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Hynodion: Os yw $f(z)$ yn methu bod yn ddadansoddol yn y pwynt z_0 ond mae'n ddadansoddol mewn rhyw bwynt ymhob cymdogaeth o z_0 yna gelwir z_0 yn **bwynt hynod** o $f(z)$.

Cyfres Laurent: Os yw $f(z)$ yn ddadansoddol ar y cylchoedd cydganol C_1 a C_2 â radiysau r_1 a r_2, wedi'u canoli yn z_0, a hefyd yn ddadansoddol trwy'r rhanbarth fodrwyol rhwng y ddau gylch, yna gall $f(z)$ gael ei gynrychioli fel y gyfres Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ar gyfer pob pwynt z o fewn y fodrwy, lle mae c_n yn gysonion cymhlyg. Gellir ysgrifennu'r gyfres fel

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Pegynau: Y swm cyntaf ar y dde yw'r **brif ran**. Os mai dim ond nifer meidraidd o dermau sydd yn y brif ran e.e.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} \\ &\quad + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_m(z - z_0)^m + \ldots \end{aligned}$$

lle mae $c_{-m} \neq 0$, yna mae gan $f(z)$ hynodyn sy'n cael ei alw'n **begwn o drefn** m yn $z = z_0$. Gelwir pegwn trefn 1 yn **begwn syml**. Os oes nifer anfeidraidd o dermau yn y brif ran, gelwir z_0 yn **hynodyn ynysedig hanfodol**. Os yw'r brif ran yn sero, yna mae gan $f(z)$ **hynodyn symudadwy** yn $z = z_0$ ac mae'r gyfres Laurent yn lleihau i gyfres Taylor.

Gweddillion: Os oes gan $f(z)$ begwn yn $z = z_0$, yna gelwir y cyfernod c_{-1} yn ehangiad Laurent o $\frac{1}{z-z_0}$ yn **weddill** $f(z)$ yn $z = z_0$. Y gweddill mewn pegwn trefn m yw:

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right\}.$$

Wrth enrhifo'r integrynnau sy'n dilyn, dilynir y gromlin C mewn cyfeiriad gwrthglocwedd.

Theorem Cauchy: Os yw $f(z)$ yn ddadansoddol o fewn ac ar hyd y gromlin gaeedig syml C, yna mae $\oint_C f(z)dz = 0$.

Fformiwla integryn Cauchy: Os yw $f(z)$ yn ddadansoddol o fewn ac ar hyd cromlin gaeedig syml C, ac os yw z_0 yn unrhyw bwynt o fewn C, yna mae

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0).$$

Ymhellach, mae

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Theorem y gweddill: Os yw $f(z)$ yn ddadansoddol o fewn ac ar hyd y gromlin gaeedig syml C, heblaw mewn nifer meidraidd o begynnau o fewn C, mae

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= 2\pi j \times [\text{ swm gweddillion} \\ &\qquad f(z) \text{ yn y pegynnau tu mewn i } C]. \end{aligned}$$

Gwerthoedd a Fectorau Eigen

Mae **fector eigen** matrics sgwâr A yn fector colofn ansero X fel bod $AX = \lambda X$, lle mae'r sgalar λ yn dynodi'r **gwerth eigen** cyfatebol. Datrysir yr **hafaliad nodweddiadol**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

er mwyn darganfod y gwerthoedd eigen. Mae gan fatrics cymesur A, sydd ag $n \times n$ elfen real, werthoedd eigen real yn unig ac n fector eigen. Mae fectorau eigen sy'n cyfateb i werthoedd eigen matrics cymesur real yn orthogonol.
Mae'r **matrics moddol**, P, sy'n cyfateb i'r matrics sgwâr, $n \times n$, A, yn fatrics sgwâr, $n \times n$, sydd â fectorau eigen A fel ei golofnau. Os defnyddir n fector eigen annibynnol i ffurfio P, yna mae $P^{-1}AP$ yn fatrics croeslinol gyda gwerthoedd eigen A fel cofnodion croeslinol, wedi'u cymryd yn yr un drefn a wnaed ar gyfer y fectorau eigen er mwyn ffurfio P.

mathcentre

Am yr holl gefnogaeth rydych ei angen â'ch cwrs

mwy o

Ffeithiau a Fformiwlâu

Prosiect aml-ddisgyblaethol sy'n cynnig adnoddau rhad ac am ddim i fyfyrwyr a staff er mwyn hwyluso dysgu ac addysgu mathemateg yn yr ysgol a'r brifysgol yw'r **mathcentre**.

www.**math**centre.ac.uk

Cynhyrchwyd y daflen hon ar y cyd rhwng yr Higher Education Academy Maths, Stats & OR Network a'r Coleg Cymraeg Cenedlaethol.

Am fwy o adnoddau, ewch i'r Porth www.porth.ac.uk neu www.colegcymraeg.ac.uk.

Calcwlws Fector

$$\text{gradd} \equiv \nabla \qquad \text{dar} \equiv \nabla\cdot \qquad \text{cwrl} \equiv \nabla\times$$

$$\nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{Gweithredydd Laplace} \equiv \nabla^2 \equiv \text{dar(gradd)}$$

$$\equiv \nabla\cdot\nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Os yw $\Phi(x, y, z)$ yn faes sgalar a bod $\mathbf{v}(x, y, z) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ yn faes fector, mae

$$\text{gradd}\,\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k} \qquad \text{yn fector,}$$

$$\text{dar}\,\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \qquad \text{yn sgalar,}$$

$$\text{cwrl}\,\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad \text{yn fector.}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

$$\nabla^2\mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}).$$

Mynegiadau calcwlws fector:

gradd$(\Phi\psi) = \Phi$ gradd $\psi + \psi$ gradd Φ
dar $(\Phi\mathbf{a}) = \Phi$ dar $\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot$gradd Φ
cwrl $(\Phi\mathbf{a}) = \Phi$ cwrl $\mathbf{a}+$gradd $\Phi\times\mathbf{a}$
cwrl gradd $\Phi = \mathbf{0}$, dar cwrl $\mathbf{a} = 0$
cwrl cwrl $\mathbf{a}$ =gradd dar $\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}$
gradd$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot$gradd$)\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot$gradd$)\,\mathbf{b}+\mathbf{b}\times$cwrl $\mathbf{a}+\mathbf{a}\times$cwrl $\mathbf{b}$
dar$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot$cwrl $\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot$cwrl $\mathbf{b}$
cwrl$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot$gradd$)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot$gradd$)\mathbf{b} + \mathbf{a}$ dar $\mathbf{b} - \mathbf{b}$ dar $\mathbf{a}$

Theorem Green yn y plân:

$$\oint_C (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Theorem Stokes:

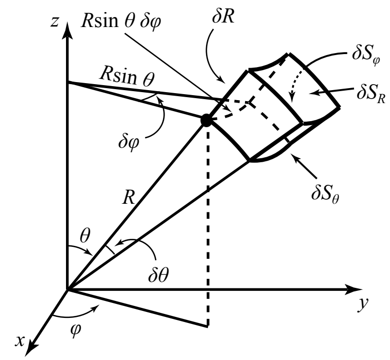
$$\oint_C \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \text{cwrl}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Theorem Dargyfeiriad:

$$\oint_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \text{dar}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V.$$

Cyfesurynnau pegynlinol sfferig

Mae'r diagram isod yn dangos cyfesurynnau pegynlinol sfferig (R, θ, φ).



$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} R &\geq 0 \\ 0 \leq \theta &\leq \pi \\ 0 \leq \varphi &< 2\pi \end{aligned}$$

Os yw $\mathbf{v} = v_R\hat{\mathbf{e}}_R + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi$:

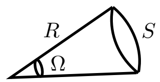
$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 v_R\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v_\varphi\right),$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_R & R\hat{\mathbf{e}}_\theta & R\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ v_R & Rv_\theta & R\sin\theta v_\varphi \end{vmatrix},$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

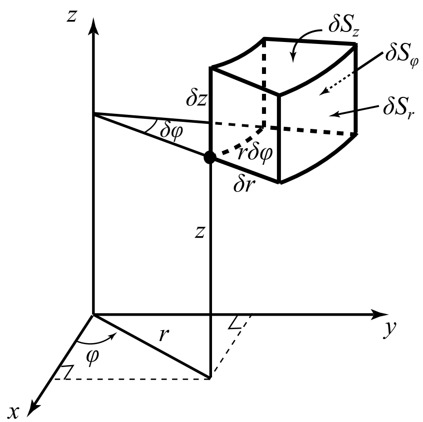
Elfen gyfaint: $\delta V = R^2\sin\theta\,\delta R\,\delta\theta\,\delta\varphi$.
Elfennau arwyneb:
$\delta S_R = R^2\sin\theta\,\delta\theta\,\delta\varphi$,
$\delta S_\theta = R\sin\theta\,\delta R\,\delta\varphi$,
$\delta S_\varphi = R\,\delta R\,\delta\theta$.



Onglau solid: Ystyriwch ran o sffêr â radiws R. Os mai'r arwynebedd a dorrir i ffwrdd ar ei arwyneb yw S, yr **ongl solid** yn ei ganol yw $\Omega = \frac{S}{R^2}$ steradian. Yr ongl solid yn apig côn o ongl hanner fertigol, θ, yw $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$.

Cyfesurynnau pegynlinol silindraidd

Mae'r diagram isod yn dangos y cyfesurynnau pegynlinol silindraidd (r, φ, z).



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} r &\geq 0 \\ 0 \leq \varphi &< 2\pi \\ -\infty < z &< \infty \end{aligned}$$

Os yw $\mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi + v_z\hat{\mathbf{e}}_z$:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(v_\varphi\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & r\hat{\mathbf{e}}_\varphi & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix},$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

Elfen gyfaint: $\delta V = r\,\delta r\,\delta\varphi\,\delta z$.
Elfennau arwyneb:
$\delta S_r = r\,\delta\varphi\,\delta z$,
$\delta S_\varphi = \delta r\,\delta z$,
$\delta S_z = r\,\delta r\,\delta\varphi$.

Ysgrifennwyd gan Tony Croft a Joe Ward
ar gyfer y Ganolfan Cefnogi Dysgu Mathemateg
ym Mhrifysgol Loughborough.
Cyfieithwyd gan Tudur Davies o'r
Coleg Cymraeg Cenedlaethol a Phrifysgol Aberystwyth.
Cysodiad a chelfwaith gan yr awduron

Cyfres Fourier

Cyfres Fourier:
Os yw $f(t)$ yn gyfnodol â chyfnod T, rhoddir ei gyfres Fourier gan

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right),$$

neu, os yw $\omega = 2\pi/T$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Gelwir a_n a b_n yn **gyfernodau Fourier**. Rhoddir hwy gan

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t, \qquad \text{ar gyfer } n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t, \qquad \text{ar gyfer } n = 1, 2, 3\ldots$$

lle gellir dewis d i gael unrhyw werth.
Os yw $f(t)$ yn od-ffwythiant, mae $a_n \equiv 0$, ac felly

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t.$$

Os yw $f(t)$ yn eil-ffwythiant, mae $b_n \equiv 0$, ac felly

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t.$$

Theorem Parseval:

$$\frac{2}{T}\int_0^T (f(t))^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Ffurf gymhlyg:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{j2n\pi t/T}, \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-j2n\pi t/T}\mathrm{d}t.$$

Cyfres sin hanner-amrediad: O wybod $f(t)$ ar gyfer $0 < t < \frac{T}{2}$, mae ei estyniad od-ffwythiannol cyfnodol â chyfnod T a chyfres Fourier

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}.$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \quad \text{ar gyfer } n = 1, 2, 3\ldots$$

Cyfres cos hanner-amrediad: O wybod $f(t)$ ar gyfer $0 < t < \frac{T}{2}$, mae ei estyniad eil-ffwythiannol cyfnodol â chyfnod T a chyfres Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{T}.$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \quad \text{ar gyfer } n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Trawsffurf Fourier

Trawsffurf Fourier $f(t)$ yw $F(\omega)$, sy'n cael ei ddiffinio fel

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = F(\omega).$$

Rhoddir y **trawsffurf Fourier gwrthdro** gan

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t).$$

ffwythiant $f(t)$	trawsffurf Fourier $F(\omega)$
$Au(t)e^{-\alpha t},\ \alpha > 0$	$\frac{A}{\alpha + j\omega}$
$\begin{cases} 1 & -\alpha \le t \le \alpha \\ 0 & \text{fel arall} \end{cases}$	$\frac{2\sin\omega\alpha}{\omega}$
cysonyn A	$2\pi A\delta(\omega)$
$u(t)A$	$A\left(\pi\delta(\omega) - \frac{j}{\omega}\right)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	$e^{-j\omega a}$
$\cos at$	$\pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$
$\sin at$	$\frac{\pi}{j}(\delta(\omega-a) - \delta(\omega+a))$
sgn(t)	$\frac{2}{j\omega}$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\mathrm{sgn}(\omega)$
$\mathrm{e}^{-\alpha\lvert t\rvert},\ \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

Llinoledd:

$$\mathcal{F}\{f+g\} = \mathcal{F}\{f\} + \mathcal{F}\{g\}, \qquad \mathcal{F}\{kf\} = k\mathcal{F}\{f\}.$$

Theoremau syfliad: Os mai $F(\omega)$ yw trawsffurf Fourier $f(t)$, yna

$$\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{jat}f(t)\} = F(\omega - a), \qquad a \text{ yn gyson.}$$

$$\mathcal{F}\{f(t-\alpha)\} = \mathrm{e}^{-j\alpha\omega}F(\omega), \qquad \alpha \text{ yn gyson.}$$

Differiad: Y trawsffurf Fourier o'r $n$fed deilliad, $f^{(n)}(t)$, yw $(j\omega)^n F(\omega)$.

Deuolrwydd: Os mai $F(\omega)$ yw trawsffurf Fourier $f(t)$, yna'r

trawsffurf Fourier o $F(t) = 2\pi \times f(-\omega)$.

Cyfrodedd a chydberthyniad: Trawsffurf Fourier $f(t) * g(t)$ yw $F(\omega)G(\omega)$ lle mae

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = g(t) * f(t).$$

Trawsffurf Fourier $f(t) \star g(t)$ yw $F(\omega)G(-\omega)$ lle mae

$$f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(\lambda - t)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Trawsffurf Fourier arwahanol

Trawsffurf Fourier arwahanol y dilyniant o N term

$$\{g[0], g[1], g[2], \ldots, g[N-1]\}$$

yw'r dilyniant

$$\{G[0], G[1], G[2], \ldots, G[N-1]\},$$

lle mae

$$G[k] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n]\mathrm{e}^{-2jnk\pi/N}.$$

Ymhellach, mae

$$g[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G[k]\mathrm{e}^{2jnk\pi/N}.$$

Cyfresi Maclaurin a Taylor

Cyfres Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^r}{r!}f^{(r)}(0) + \ldots$$

Cyfres Taylor (un newidyn):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^r}{r!}f^{(r)}(a) + \ldots$$

Cyfres Taylor (dau newidyn): Ar gyfer ffwythiant $f(x,y)$ o ddau newidyn

$$\begin{aligned} f(x,y) \;=\; & f(a,b) + \frac{1}{1!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b) \\ & + \frac{1}{2!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b) + \ldots \\ & + \frac{1}{r!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(a,b) + \ldots \end{aligned}$$

Pwyntiau sefydlog mewn dau newdiyn: Lleolir pwyntiau sefydlog (a,b) y ffwythiant $z = f(x,y)$ trwy ddatrys $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Diffiniwch $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ yn (a,b).
Rhoddir natur y pwynt sefydlog gan:

$\Delta < 0$ — col,

$\Delta > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ — pwynt minimwm,

$\Delta > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ — pwynt macsimwm.

Y trawsffurf Laplace

Trawsffurf Laplace $f(t)$ yw $F(s)$ â ddiffinnir gan

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

ffwythiant $f(t), t \geqslant 0$	trawsffurf Laplace $F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
$t \cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
$u(t)$ step uned	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$ ffwythiant ergyd	1
$\delta(t-a)$	e^{-sa}
$f(t)$ cyfnodol	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t}{1-e^{-sT}}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s)$

Llinoledd:

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}, \qquad \mathcal{L}\{kf\} = k\mathcal{L}\{f\}.$$

Theoremau syfliad: Os yw $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ yna

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a).$$

$$\mathcal{L}\{u(t-d)f(t-d)\} = e^{-sd}F(s) \qquad d > 0.$$

$u(t)$ yw'r ffwythiant step uned neu'r ffwythiant Heaviside.

Trawsffurf Laplace o ddeilliadau ac integrynnau:

$$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0),$$
$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Y theorem gyfrodedd:

Trawsffurf Laplace $f(t) * g(t)$ yw $F(s)G(s)$ lle mae

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\lambda) g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = g(t) * f(t).$$

Y trawsffurf z

Diffinnir y **trawsffurf** z (un-ochrog), $F(z)$, ar gyfer dilyniant $f[k]$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, gan

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k}.$$

dilyniant $f[k]$	z trawsffurf $F(z)$
$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$	1
$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
e^{-ak}	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-a}}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$
k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\sin ak$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}$
$\cos ak$	$\frac{z(z-\cos a)}{z^2 - 2z\cos a + 1}$
$\mathrm{e}^{-ak} \sin bk$	$\frac{z\mathrm{e}^{-a} \sin b}{z^2 - 2z\mathrm{e}^{-a}\cos b + \mathrm{e}^{-2a}}$
$\mathrm{e}^{-ak} \cos bk$	$\frac{z^2 - z\mathrm{e}^{-a}\cos b}{z^2 - 2z\mathrm{e}^{-a}\cos b + \mathrm{e}^{-2a}}$
$\mathrm{e}^{-bk} f[k]$	$F(\mathrm{e}^b z)$
$kf[k]$	$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$

Llinoledd: Os yw $f[k]$ a $g[k]$ yn ddau ddilyniant a bod c yn gyson, yna

$$\mathcal{Z}\{f[k] + g[k]\} = \mathcal{Z}\{f[k]\} + \mathcal{Z}\{g[k]\},$$
$$\mathcal{Z}\{cf[k]\} = c\mathcal{Z}\{f[k]\}.$$

Theorem syfliad gyntaf:

$$\mathcal{Z}\{f[k+1]\} = zF(z) - zf[0],$$
$$\mathcal{Z}\{f[k+2]\} = z^2 F(z) - z^2 f[0] - zf[1].$$

Ail theorem syfliad:

$$\mathcal{Z}\{f[k-i]u[k-i]\} = z^{-i}F(z), \qquad i = 1, 2, 3 \ldots$$

lle mae $F(z)$ yn dynodi trawsffurf z o $f[k]$, ac $u[k]$ yw'r dilyniant step uned.

Cyfrodedd: $\mathcal{Z}\{f[k] * g[k]\} = F(z)G(z)$,
lle mae

$$f[k] * g[k] = \sum_{m=0}^{k} f[m] g[k-m].$$

Integru Rhifiadol

Rheol Simpson: ar gyfer n sy'n eilrif, a $h = \frac{x_n - x_0}{n}$,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \right.$$
$$\left. + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right).$$

Gwall blaendorri $\approx -\frac{(x_n - x_0)h^4 f^{(4)}(\zeta)}{180}$.

Fformiwla **Gauss-Legendre** n pwynt:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

n	x_i	w_i
2	± 0.577350	1.000000
3	± 0.774597	0.555556
	0.0	0.888889
4	± 0.861136	0.347855
	± 0.339981	0.652145
5	± 0.906180	0.236927
	0.0	0.568889
	± 0.538469	0.478629

Hafaliadau differol cyffredin

Er mwyn datrys $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$:

Dull Euler:

$$y_{r+1} = y_r + hf(x_r, y_r).$$

Dull Euler wedi'i addasu:

$$y_{r+1}^{(p)} = y_r + hf_r \quad f_{r+1}^{(p)} = f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(p)}),$$
$$y_{r+1}^{(c)} = y_r + \frac{h}{2}(f_r + f_{r+1}^{(p)}).$$

Dull Runge-Kutta:

$$k_1 = hf(x_r, y_r), \quad k_2 = hf(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{k_1}{2}),$$
$$k_3 = hf(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{k_2}{2}), \quad k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3),$$
$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$